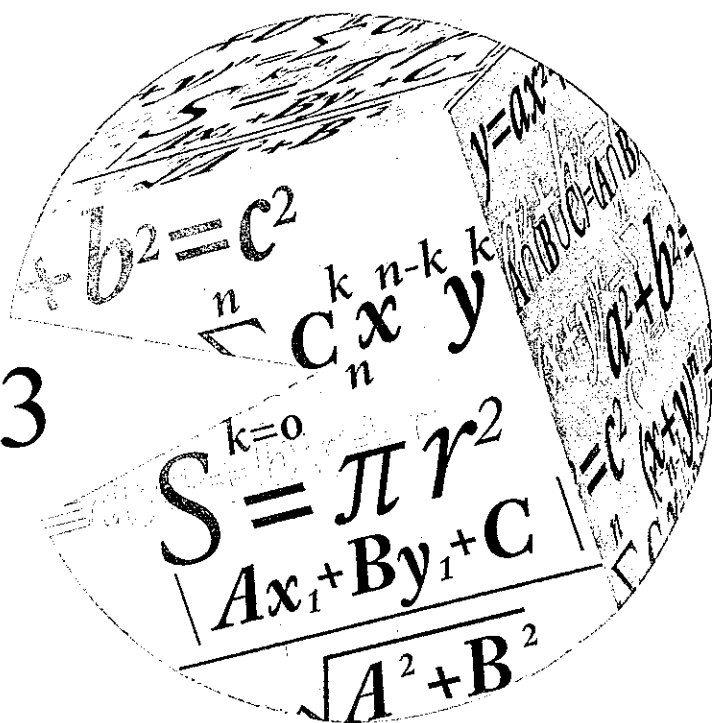


数学教学

SHUXUE JIAOXUE

中华人民共和国教育部主管



2024·3

华东师范大学主办

新视角
外国数学教育
数学教学研究
ICME动态

ISSN 0488-7387



数 学 教 学

2024 年第 3 期(总第 439 期)

主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学

顾 问: 席南华 王建磐
赵小平 鲍建生
主 编: 熊 斌
发行范围: 公 开

编辑单位: 《数学教学》编辑部
出版单位: 华东师范大学出版社有限公司
邮 政 编 码: 200062(上海中山北路 3663 号)
印 刷: 上海华顿书刊印刷有限公司
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电 子 邮 箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn
电 话: 021-62232712
欢迎关注《数学教学》微信号



目 录

新视角

数学与思维(续 13) 周 青 1

外国数学教育

新加坡“O”水准考试试卷分析及启示
..... 江春莲 韩萧楠 周 超 4

数学探究

Hölder 不等式的一种新证法及推广
..... 施 俊 刘建忠 彭庆英 13

数学教学研究

初中数学核心概念课“结构化”教学的实施策略与思考——
以浙教版“6.1 反比例函数”为例 陈建国 侯 菲 17
基于数字教材的初中数学教学实践与反思——以“利用函数
图像研究函数性质”为例 张建伟 22
沉沙无意却成洲——一道教材练习带来的意外收获
..... 李春秋 于道洋 26

纸间线面寻关联,数学模型促生长——以“空间直线、平面
的垂直”复习课教学为例 董晓立 29
结构化教学单元主题教学实践——以“用空间向量研究夹
角问题”为例 王 敏 33
调动初中生线上数学作业积极性的探究案例 路红英 38

ICME 动态

ICME-14 之“数学学习与数学游戏”工作坊 田方琳 40
从 ICME-14 透视数学家与数学教育者的合作趋势
..... 李坤丽 46

新加坡“O”水准考试试卷分析及启示

江春莲¹ 韩萧楠¹ 周超²

(1. 澳门大学教育学院, 澳门 999078; 2. 苏州大学数学科学学院, 江苏 苏州 215123)

国际研究表明来自有高风险公开考试国家的学生在国际教育比较中普遍表现更好^[1], 新加坡就是这样一个国家. 一方面, 小学生(1—6 年级)要参加小学毕业离校考试(Primary School Leaving Examination, 简称为 PSLE), 其成绩将决定初中阶段学习课程的水平; 初中生(7—10 年级)毕业时要参加普通教育证书(General Education Certificate, 简称为 GCE)“O”(O 是 Ordinary 的缩写)水准考试, 该考试成绩将决定学生是读普通高中(Junior College, 初级学院)还是职业高中. 高中生(11—12 年级)毕业时要参加 GCE“O”(O 是 Ordinary 的缩写)水准考试, 其成绩将决定学生能否上大学以及大学的专业. 另一方面, 新加坡学生在若干届国际数学与科学教育研究趋势(Trends in International Mathematics and Science Study, 简称为 TIMSS)^[2]和国际学生评估项目(Programme for International Student Assessment, 简称为 PISA)^[3]中均以绝对优势排在前列. 我们曾介绍过新加坡的 PSLE 考试试题^[4-5], 这次我们将对 2017—2021 年 5 年间 GCE“O”水准考试数学试卷作详细的分析. 尽管“O”水准考试在重要性上对应于我国的中考, 但其考试内容所涵盖的范围则相当于我国的高一和高二之间, 所以对其试卷进行分析将给我们的中学课程以及中考和高考试卷的编制带来一些启示.

1 新加坡 GCE“O”水准考试简介

新加坡 GCE“O”水准考试由新加坡教育部和英国剑桥大学考试委员会联合承办, 其中数学考试安排在 10 月, 共分四场, 其中两场是针对所有参加“O”水准考试的学生, 试卷代号分别为 4048/01(测试一), 4048/02(测试二). 测试一 120 分钟, 满分 80 分; 测试二 150 分钟,

满分 100 分. 另外两场是针对数学学有余力的学生, 考查“附加数学”(Additional mathematics)部分, 试卷代号分别为 4049/01, 4049/02, 考试时间均为 135 分钟, 满分分别为 80 分和 100 分. 本文仅对新加坡 2017—2021 年内的测试一和测试二进行分析.

1.1 试卷说明

试卷说明包括两个部分, 一部分是关于考生姓名、准考证号等的填写, 答题用笔(用深蓝色或黑色钢笔)等的说明; 另一部分则是对科学计算器的使用与准确度要求的说明.

在每年的测试卷中还列出了一些需要用到的公式. 如在 2021 年的测试卷中包括了 12 个公式, 它们分别涉及复利的计算、圆锥和球体的表面积和体积、三角形的面积、弧长和扇形面积(用弧度表示的)、正余弦定理、对应频数分布直方图的均值和标准差的计算.

1.2 试卷结构

新加坡“O”水准考试题量大, 子问题比较多, 有的子问题还有小问题. 纵观 2017—2021 年间的考试卷, 测试一的题量在 23—25 题之间, 2017 年是 23 题, 2019 年是 25 题, 其余年份则为 24 题; 而测试二均为 10 道大题.

若以子问题计, 2021 年的测试一共有 43 个, 测试二共有 33 个(表 1). 在测试一的 24 道大题中, 只有 10 道题(42%)没有子问题; 测试二平均每道题的子问题个数有 3.3 个. 这些子问题层层递进, 一步步地引导学生得到最终的答案.

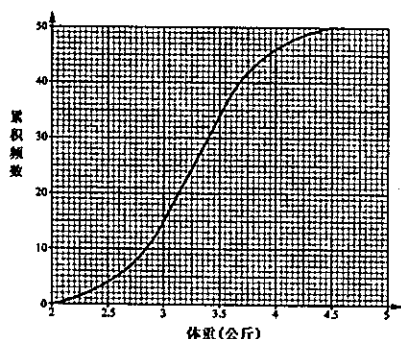
以 2018 年测试二中的第 9 题(简记为 2018-02-09, 在后续行文中的题目采用类似的记法)为例, 其有 2 个子问题, 第一个子问题(简记为 2018-02-09(a))下有 5 个小问题, 第二个子问题下有 2 个小问题, 如图 1.

表1 2021年测试二各大题的子问题与小问题个数

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总数
子问题个数	3	5	6	2	3	3	4	2	2	3	33
小问题个数	4	5	6	2	4	3	4	5	5	3	41

乔正在研究一家医院的孕产护理状况,她从网上找到了一些信息.

(a)她找到了在该医院出生的50名新生儿的体重信息,其累积频数曲线表示了新生儿体重的分布:



①根据上面的表格完成下面的新生儿体重频数分布表.

体重(公斤)	$2.0 \leq m < 2.5$	$2.5 \leq m < 3.0$	$3.0 \leq m < 3.5$	$3.5 \leq m < 4.0$	$4.0 \leq m < 4.5$
频数					

(ii)估算新生儿体重的平均值 [1分]

(iii)估算新生儿体重的标准差 [1分]

(iv)解释为什么这里计算的平均值和标准差只是估计值 [1分]

(v)一篇报刊文章说90%的新生儿体重超过了2.8公斤,该医院的数据是否支持这种说法? [2分]

(b)下表给出了某一天在该医院出生的新生儿的母亲年龄及其性别的信息,每个母亲只生了一个孩子.

	母亲年龄在30岁以下	母亲年龄在30岁及以上
男孩	3	9
女孩	7	6

①如果从这些母亲中随机选择一个,求她的年龄低于30岁的概率,用最简分数形式表示 [1分]

(ii)如果随机选择两位母亲,求下列事件的概率

(1)她们都生了一个女婴 [2分]

(2)两人的年龄均在三十岁或以上,但只有一人生了一个男婴 [2分]

图1 2018-02-09

2 试卷内容分析

根据题目所属的主要学习内容领域(数与运算、代数、几何、统计和概率),逐年计算各领域考题的分值,并汇总(表2).不难发现,新加坡的“O”水准数学考试中对代数的考查分量最重,除2020年外,其余各年代数部分的分值占比都在40%以上;其次是几何,约占25%—31%的分值;再其次是数与运算,约占13%—21%的分值;统计与概率部分的分值占比最少,约10%—16%.

2.1 数与运算

数与运算部分考查的内容有:(a)韦恩图表示的集合之间的关系;(b)跟日常生活相关的百分比的应用问题,特别是单利、复利的计算;(c)数论中的质因数分解、最大公约数、最小公倍数、完全平方、完全立方等;(d)比例尺;(e)正比例和反比例等.这部分的样题见表3.

在上述内容中,百分数、比例尺和比率的内容均为我国小学数学所学,几乎不会出现在我国中考试卷中,更别说在高考中了.然而,在上世纪80年代,英国伦敦大学的哈特(Hart)博士领导的研究小组^[6]进行了一项大型研究,其题目为“学生对中学数学与科学概念的理解(CSMS)”,作为该课题的一部分,他们研究了英国中学生

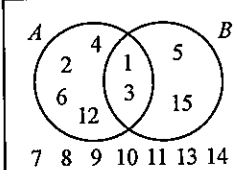
表2 2017—2021年间“O”水准数学试卷中各内容领域问题分值(百分比)

		数与运算	代数	几何	统计和概率
2017年	测试一	19(23.8%)	38(47.5%)	17(21.3%)	6(7.5%)
	测试二	18	40	30	12
	合计	37(20.6%)	78(43.3%)	47(26.1%)	18(10.0%)
2018年	测试一	18(22.5%)	27(33.8%)	25(31.3%)	10(12.5%)
	测试二	10	59	20	11
	合计	28(15.6%)	86(47.8%)	45(25.0%)	21(11.7%)
2019年	测试一	13(16.6%)	36(45.0%)	23(28.8%)	8(10.0%)
	测试二	10	50	30	10
	合计	23(12.8%)	86(47.8%)	53(29.4%)	18(10.0%)

(续表)

		数与运算	代数	几何	统计和概率
2020年	测试一	25(31.3%)	17(21.3%)	26(32.5%)	12(15.0%)
	测试二	10	43	30	17
	合计	35(19.4%)	60(33.3%)	56(31.1%)	29(16.1%)
2021年	测试一	18(22.5%)	36(45.0%)	15(18.8%)	11(13.8%)
	测试二	10	41	39	10
	合计	28(15.6%)	77(42.8%)	54(30.0%)	21(11.7%)
2017—2021年	合计	151(16.8%)	387(43.0%)	255(28.3%)	107(11.9%)

表3 数与运算部分样题

集合: 韦恩图	Q1 (2021-01-12)	已知 $\xi = \{x \mid x \text{ 为整数, 且 } 1 \leq x \leq 15\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 3, 5, 15\}$. 将这些信息表示在韦恩图上. (a) 描述集合 A 的元素的特点[1分] (b) 列出集合 $A' \cap B'$ 中的元素[1分] (c) 求集合 $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ 中的元素个数[1分]	
百分数	Q2 (2021-01-08)		在2000年,到新加坡的国际游客人数为7690000人(精确到万位).到2018年,这个数增加了140.6%.计算2018年的国际游客入境人数[2分]
	Q3 (2021-01-01)	单利	司马投资2500元,年利率为单利1.6%,为期3年.计算3年结束时其投资总额[2分]
	Q4 (2020-01-15)	复利	贝纳兹以年利率为复利 $r\%$ 投资了850美元.在12年结束时,她的投资价值为1120元.计算 r 的值[3分]
数论	Q5 (2018-01-20)		(a) 将126表示为质因数的乘积形式[1分] (b) $126k$ 是一个完全平方数,求 k 的最小正整数[1分] (c) x 是个介于200和300之间的数,且 x 与126的最大公因数是21.求 x 的最小可能值[2分]
比例尺和比率	Q6 (2021-01-18)		(a) 一艘游船的平均燃料消耗量为每升0.000925公里.请以升/公里为单位表示其燃料消耗量[1分] (b) 另一艘游船的长度为330米,其油箱的容量为 1.228×10^6 升.按1:60的比例制作出该船的模型. (i) 求该模型的长度[1分] (ii) 求该模型燃料箱的容量[2分]
正比例和反比例	Q7 (2018-01-12)		(a) 建一个篱笆所需的时间与工人数目成反比.4名工人需要17.5小时.求5名工人需要的时间[1分] (b) 两个物体之间的引力 F 与两物体之间距离 d 的平方成反比.若两个物体之间的距离增加了20%.计算它们之间引力减少的百分比[2分]

用于解决如下十个内容的数学问题的策略和错误:测量、数的运算、位置制与小数、分数、正负数、比和比例、代数、图形、反射与旋转、向量与矩阵.其结果表明11—16岁的中学生在分数(包括百分数)、比和比例等重要概念的理解上只能达到水平二(最高是水平四),因此在初中阶段对这些内容的继续学习就显得尤其重要,因为这

是他们在日常生活中常会遇见的数学问题.

上述样题中所出现的数论内容在我国中学数学课程中不多见,但为中小学各级数学竞赛所青睐.实际上,数论是现代密码学的基石,关于质数性质和规律的研究是初等数论的基本内容之一,其不仅可以提升学生的数学素养,激发学生的数学学习兴趣.更重要的,这是

一个与很多伟大的数学问题关联紧密的领域^[7],对其了解,辅以数学科普(如费马大定理的提出及研究历史)可以让个别学生树立对其深入研究的志向.将其融入“O”水准考试并与集合结合起来是个很好的尝试.

2.2 代数

代数部分考查的内容有:(a)代数式,包括代数式的化简(如分式的通分、分式除法、负分数指数式的化简);计算代数式的值、从一个给定的代数式中求出某个特定变量的表达式等.(b)因式分解,主要考查的方法是提取公因式、十字相乘法、分组分解法和公式法.(c)方程,包括解一元一次方程、一元二次方程以及可化为一元二次方程的分式方程,简单的指数方程

等.(d)不等式,包括解一元一次不等式.(e)函数,包括一元一次、一元二次及其他各种不同形式的函数.函数部分的问题,涉及函数的作图,如一元二次函数的作图,需要作出与 x 轴、 y 轴的交点;包括一元二次函数在内的函数与直线相交得到的方程的求解;与实际问题相关的函数问题(如“速度—时间”图像)等.(f)数列,包括等差数列及由等差数列构成的新数列.(g)矩阵,应用矩阵解决一些实际问题.

表4所呈现的代数式、因式分解、解方程和解不等式四个部分的样题难度不大,多数问题的分值也不多,其中可化为一元二次方程的分式方程的求解分值最多(4分).这样的设置,可让学生重视基础训练,并达到一定的熟练度.

表4 代数式、因式分解、解方程和解不等式部分的样题

代数式	Q8 (2020-01-19(a))	化简: $3(3x+2y)-5(x-3y)$ [2分]
	Q9 (2018-02-01)	(a) 将下列式子表示成单个分式,并化成最简形式: (i) $\frac{5t^2}{v} \div \frac{25t}{v^3}$ [1分] (ii) $\frac{4}{3-2y} - \frac{5}{y+3}$ [2分] (b) 化简: $\frac{16x^2-9}{4x^2-9x-9}$ [3分] (c) 解方程: $\frac{20}{x+1} = 2x+5$ [3分]
	Q10 (2020-02-01(d))	化简: $\left(\frac{a^9}{27b^{15}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ [2分]
	Q11 (2019-02-01(b))	(b) $a = \frac{3b+4c}{5-b}$. (i) 当 $b=6, c=-2$ 时,求 a 的值 [1分] (ii) 用 a 和 c 表示 b [2分]
	Q12 (2019-02-01(c))	(c) (i) 将 $9-7x+x^2$ 表示成 $p+(q+x)^2$ 的形式 [2分] (ii) 写出 $9-7x+x^2$ 的图像最小值点的坐标 [1分]
因式分解	Q13 (2018-01-13(a))	因式分解: $8p^2q-6pq^3$ [2分]
	Q14 (2019-01-11)	(a) 因式分解: x^2-y^4 [1分] (b) 将 $6ab+1-3a-2b$ 完全分解 [2分]
	Q15 (2018-01-14)	(a) 将 $2x^2-5x-12$ 完全分解 [2分] (b) 由此,将 $2(2y-3)^2-5(2y-3)-12$ 完全分解 [2分]
方程	Q16 (2018-01-11)	解方程: $\frac{3x-4}{2} - \frac{2x}{3} = 1$ [3分]
	Q17 (2020-02-01(b))	解联立方程组: $\begin{cases} 6x-3y=16 \\ 9x+2y=11 \end{cases}$ [3分]

(续表)

	Q18 (2021-01-21(b))	运用因式分解法解方程: $8x^2 - 6x - 9 = 0$ [3分]
	Q19 (2019-02-01(d))	解方程: $\frac{1}{2x-3} + \frac{6}{x-1} = 2$ [4分]
	Q20 (2017-01-01)	给定 $\frac{1}{81} = 3^k$, 求 k [1分]
不等式	Q21 (2020-02-01)	解不等式: $\frac{2x+1}{2} \geq \frac{5-4x}{3}$ [2分]

表5 函数部分的样题

长方形 $ABCD$ 的面积是 80 cm^2 . 从该长方形中减去 $\triangle PAQ$ 和 $\triangle RCS$. 已知 $DP = QB = BR = SD = 4 \text{ cm}$, 设 $AD = x \text{ cm}$.

(a) 用 x 表示 AQ [2分]

(b) 证明: 阴影部分的面积 $y \text{ cm}^2$ 可表示为 $y = \frac{320}{x} + 4x - 16$ [3分]

(c) 下表显示的是 $y = \frac{320}{x} + 4x - 16$ 的函数值表, 请补充完整 [1分]

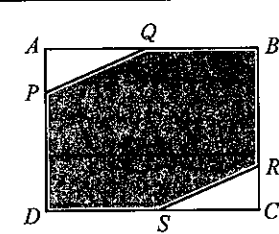
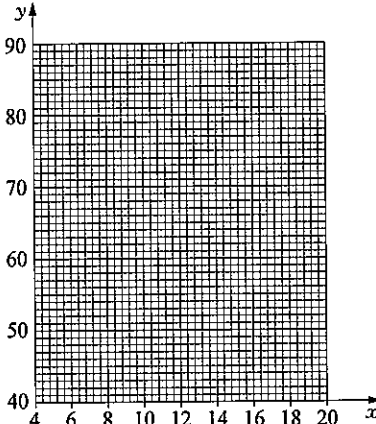
在适当的情况下, 可保留到小数点后 1 位.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	80	61.3	56	56	58.7	62.9	68		80

(d) 在坐标网格上画出 $y = \frac{320}{x} + 4x - 16$ 在 $4 \leq x \leq 20$ 时的图像 [3分]

(e) 运用所作的图像, 求出当阴影面积等于 60 cm^2 时, x 的最大值 [1分]

(f) 解释图像如何表明阴影部分的面积不能等于 50 cm^2 [1分]

函数部分的问题, 通常会将建模和函数的性质结合在一起. 这里是先建立几何问题的函数模型, 再引导学生列表、画图, 最后结合图形的特点研究函数的性质, 这样的设计可大大降低问题的难度. 与此同时, 可以呈现更多不同类型的函数, 极大地拓展了可研究函数的类型, 函数部分的样题见表 5.

数列问题, 主要考查的是等差数列或由两个等差数列生成的新数列问题. 一般是给出数列的前几项, 让学生观察它的特点, 写出后续的项和通项公式, 进而运用公式和代数知识, 解决更多的问题, 样题见表 6.

表6 数列部分的样题

下面是一个数列的前四项.

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{6}, \frac{13}{8}$$

(a) 求该数列的第五项 [1分]

(b) T_n 是该数列的第 n 项, 求 T_n 的通项公式 [3分]

(c) 设该数列相邻两项的差 $T_{n+1} - T_n$ 为 D . 求证: $D = \frac{3}{2n(n+1)}$ [3分]

(d) 解释为什么该数列相邻两项的差总是小于 1 [1分]

Q23
(2021-02-07)

表7 矩阵部分的样题

Q24 (2018-02-03)	某面包店做水果派卖. 该面包店每周经营7天. 下面的矩阵 M 显示了每天制作的不同种类水果派的数量.
	$M = \begin{pmatrix} & \text{小} & \text{中} & \text{大} \\ \text{苹果} & 70 & 40 & 30 \\ \text{草莓} & 50 & 30 & 30 \end{pmatrix}$ <p>(a) 计算矩阵 $P = 7M$ [1分] (b) 小号派的制作成本为每个0.75元, 中号派的制作成本为每个1.5元, 大号派的制作成本为每个2.25元. 用一个 3×1 的矩阵 N 表示这些量 [1分] (c) 计算矩阵 $T = PN$ [2分] (d) 说明 T 的每个元素所代表的意义 [1分] (e) 面包店以高出制作成本40%的价格出售水果派. 在某一周, 他们售出了每种规格苹果派的 $\frac{6}{7}$ 和每种规格草莓派的 $\frac{4}{5}$. 没卖出去的派都免费赠送了. 计算面包店在那一周的利润总额 [4分]</p>

如表7, 矩阵问题都是应用型的问题, 其以子问题的方式引导学生运用矩阵知识建构所需的模型, 在模型的基础上作一些运算, 最后又回到现实情境中解释所得到的结果, 让学生经历完整的建模过程. 有了这样的建模设计, 具有一定复杂度的矩阵内容才可融入进来, 让学生明白日常购物活动中的算法, 其实并不复杂.

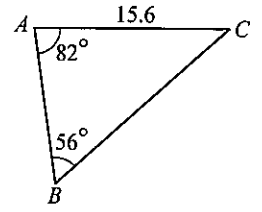
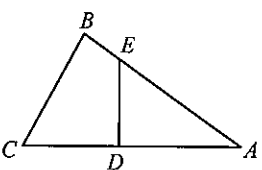
2.3 几何

几何部分考查的内容有: (a) 三角形, 包括三角形全等和相似的证明, 正余弦定理的应用; (b) 作图, 作垂直平分线、角平分线, 以及满足某些条件的平面区域; (c) 多边形, 包括多边形内角和外角相关的计算; (d) 圆, 包括圆周角定理及其与其他图形的结合问题; (e) 立体几何, 主要涉及圆锥、圆柱、球体等立体图形表面积和体积的计算, 也包括相似图形面积、体积

和容积的计算等; (f) 方位角, 包括确定的 B 点相对于 A 点的方位角, 应用方位角解决几何问题等; (g) 解析几何, 包括直线方程和两直线的位置关系; (h) 向量, 包括应用向量解决几何问题. 向量本属代数部分的内容, 但因其用于解决几何问题, 所以放到了几何部分. 为避免表格过长, 三角形、作图和多边形部分的样题见表8; 圆和立体几何部分的样题见表9; 方位角和向量部分的样题见表10. 几何部分问题每道问题都有配图, 并将一些数据标示在图上, 这样的表征有利于学生找到解决问题的思路.

表8所示的作图题既有简单的垂直平分线和角平分线, 还有以角平分线分平面得到的区域, 考查学生对角平分线性质的理解. 多边形的问题常把两个正多边形组合在一起, 同时考查内角和与外角和定理.

表8 三角形、作图、多边形部分的样题

三角形	Q25 (2021-01-19)	在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle CAB = 82^\circ$, $\angle ABC = 56^\circ$. 计算 $\triangle ABC$ 的面积 [4分]	
	Q26 (2021-01-14)	如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, 已知 $\angle ABC = \angle ADE$. (a) 证明两个三角形相似 [2分] (b) 已知 $AC = 12$ cm, $AB = 10$ cm, $AE = 9$ cm. 求证: $CD = 4.5$ cm. 写出你的证明过程 [2分]	

(续表)

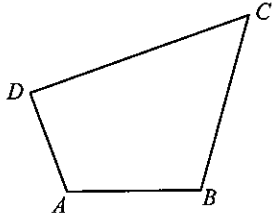
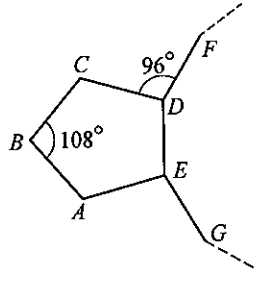
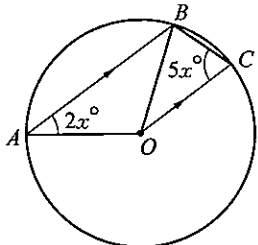
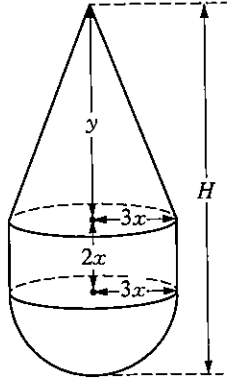
作图	Q27 (2019-01-12)	右图显示的一个四边形 $ABCD$. 在图上, (a) 作 $\angle ADC$ 的角平分线[1分] (b) 作 AB 的垂直平分线[1分] (c) 将 $ABCD$ 内的区域涂成阴影,使其内部的点到 DC 的距离比到 DA 的距离更近,且到 A 的距离比到 B 的距离更近[1分]	
多边形	Q28 (2017-01-08)	如图所示, $ABCDE$ 是正五边形, GE 、 ED 、 DF 是第二个正多边形的三边. 已知: $\angle ABC = 108^\circ$, $\angle CDF = 96^\circ$. 求第二个正多边形的边数[3分]	

表9 圆和立体几何部分的样题

圆	Q29 (2017-01-17)	如图所示, A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上的点, $OC \parallel AB$. 已知: $\angle OAB = 2x^\circ$, $\angle OCB = 5x^\circ$. 求 x [4分]	
立体几何	Q30 (2021-02-04)	右图显示的是由圆锥、圆柱和半球形成的立体图形. 圆锥的底面半径为 $3x$ cm, 高为 y cm. 圆柱的底面半径为 $3x$ cm, 高为 $2x$ cm. 半球的半径为 $3x$ cm. (a) 如果圆锥的体积是半球体积的 2 倍. 证明: $y = 12x$ [3分] (b) 如果该立体图形的表面积为 300 cm^2 . 计算该立体图形的总高度 H [6分]	

如表9所示,圆的问题主要是综合运用圆的弦、半径、角之间的关系和三角形、平行线的性质做计算;立体几何问题是圆锥、圆柱和半球的组合图形,解决第一个问题的过程中,需要根据给定的体积关系建立方程后再化简;解决第二个问题则需要用表面积公式建立方程,求解后再将三个高度加在一起得到该立体图形的总高度 H .

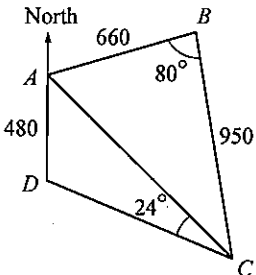
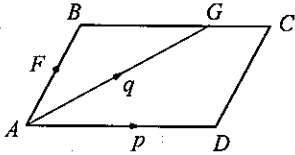
表10给出了方位角、向量部分的样题.解

决该向量问题,需要用到向量的减法、长度、共线向量等概念.方位角是很实用的几何知识,将其与包括三角形在内的多边形结合起来,可以运用正余弦定理求两地距离和某个角度,进而求某个 B 点相对于某个 A 点的方位角、某个领域的面积等等,让学生学以致用.

2.4 统计和概率

统计部分考查的内容有:(a)几种重要的统计图,即扇形图、茎叶图、盒须图、频数分布表、

表 10 方位角、向量部分的样题

方位角	Q31 (2020-02-04)	<p>$ABCD$ 是个水平地面上的停车场,其间有一条路 AC. A 在 D 点的正北方向. $AB = 660$ m, $BC = 950$ m, $AD = 480$ m. $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACD = 24^\circ$, $\angle ADC$ 为钝角.</p> <p>(a) 证明: $AC = 1060$ m (精确到 3 位有效数字)[3 分] (b) 计算点 D 相对于点 C 的方位角[3 分] (c) Sita 以 9.5 km/h 的速度在公园慢跑. 她从点 A 开始,沿该停车场的边缘慢跑跑到 B 点,然后是 C 点,最后直接回到 A 点. 计算她沿这条路线慢跑所花的时间. 答案以分和秒的形式呈现,精确到十秒[3 分]</p>	
向量	Q32 (2021-02-08)	<p>(a) 点 R 的位置向量为 $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, 点 S 的位置向量为 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.</p> <p>(i) (1) 求表示 R 平移到 S 的向量[1 分] (2) 求 \overrightarrow{RS} 的长度[2 分] (ii) 点 T 的位置向量为 $\begin{pmatrix} k \\ 7 \end{pmatrix}$, 且 $\overrightarrow{ST} = 10$. 求 k 的两个可能的值[3 分]</p> <p>(b) $ABCD$ 是个平行四边形. F 在 AB 上, 满足 $AF:AB = 1:2$. G 是 BC 上, 满足 $BG:GC = 3:1$. 设 $AD = p$, $AG = q$.</p> <p>(i) 用 p 和 q 的最简形式表示 \overrightarrow{CD}[2 分] (ii) H 是满足 $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CF}$ 的点, 用 p 和 q 的最简形式表示 \overrightarrow{AH}[4 分]</p>	

频数分布直方图、累积频数曲线图等,以及它们之间的转换;(b)统计值的计算,如均值、标准差、四分位距等的计算;(c)对统计结果的解释;(e)根据统计值构造数据集,如已知 5 个正整数的平均数为 12,中位数为 15,众数为 21,求这 5 个数(2021-01-06). 概率部分考查的内容有:(a)计算事件的概率;(b)根据概率推断盒子中某种颜色球或弹珠的个数. 统计与概率部分的样题见图 1.

统计部分给人印象深刻的是对统计图的考查,初中的统计内容不仅涉及频数分布直方图,还顺便介绍了累积频数曲线图并强调两者之间的转换,而且涉及茎叶图和盒须图两个比较重要的能够呈现数据特征的统计图,让学生学会把握统计数据的整体特点. 概率内容的考查相对比较简单,集中于离散型的古典概型.

3 特点和启示

新加坡的教育体系最大的特征是分流,根据学生的能力进行分流,让不同能力的学生学习不同水平的课程. 由于分流所带来的“标签”效应,近年来政府也在努力进行改革,让学生根据自己在不同学科的能力,选择合适的不同

组合的课程. 然而,对以华人为主的新加坡来说,“O”水准考试仍然是高风险的考试,对其数学试卷的分析,可以给我们中考、高考试题的设计带来一些启示.

第一,数学考试时间较长. 新加坡“O”水准数学考试,一般学生要考两场,总时间是 270 分钟,而数学能力较高的学生则需要考四场,总时间 540 分钟,足足 9 个小时. 这么长时间的考试,考查的内容涵盖范围自然很广. 简单的以较少分值的题目出现,复杂点的则以子问题、小问题系列出现,全面考查数学的基本概念、基本技能,及其在各种不同情境下的应用. 通过多场考试,可以更全面、更客观地评估学生的数学水平. 我国也曾讨论过增加中考、高考时间的问题,如在 2019 年初四川省政协十二届二次会议上,九三学社四川省委的集体提案中,有份名为《关于延长数学高考时间的建议》. 尽管因为各种客观原因,该建议未能得到实施,但增加一个附加卷却是高风险考试的一般做法,如澳门四高校联合入学考试(即澳门的高考)就单独设数学附加卷,考查想要修读理工科课程学生的数学能力. 多几道综合性较

强题目的考核,可以提升高风险数学考试的效度^[8]。

第二,关注数学在实际生活中的应用。我

们依据 PISA 测试的框架^[2]对问题情境进行了分类,即分为:无情境、个人生活情境、职业情境、社会情境和科学情境,结果见表 11。

表 11 2017—2021 年“O”水准数学试卷中各种情境问题分值(百分比)

	2017	2018	2019	2020	2021	总数	百分比
无情境	107	105	121	132	120	585	65.0%
个人生活情境	17	16	30	20	8	91	10.1%
职业情境	15	50	5	0	10	80	8.9%
社会情境	32	6	22	24	29	113	12.6%
科学情境	9	3	2	4	13	31	3.4%

表 11 数据表明,“O”水准考试数学问题以无情境的为主,约占 65%,其次是社会和个人生活情境,这两项合起来约占 23%,职业情境和科学情境约占 12%。多年来,新加坡一直很注重将数学课程的学习与学生的日常生活和社会问题结合起来,以帮助学生理解数学概念和方法,自然地,考试中的应用场景也以个人和社会生活为主。职业和科学情境,一般综合性较强,难度较大。随着 STEM 教育的推行,在不久的将来,这类应用问题应该会略微增多。

自 1993 年起,我国也在中考和高考中增设了应用问题,但与新加坡相比,应用题所占的比重仍然较低,难以引起足够的重视。前面图 1 所示的概率统计问题和表 7 所示的矩阵问题,都是很好的示例。概率统计问题不仅考查学生对相关概念的理解能力,还考查学生读取信息的能力,结合实际情境解释结果的能力和进行统计推断的能力。应用问题一般较长,其出现也考查了学生的数学阅读能力。

第三,注重数学表征。从上面的样题可以看出来,除数和式的计算问题外,涉及函数、几何和统计的问题,几乎都有配图,函数和统计的配图多数有显示坐标网格,方便学生读取信息。画图、读图、基于图形找到问题的解答,充分发挥图形在辅助数学思考中的作用。我国教材在新知识学习阶段的配图不少,但在练习题部分配图却不多,学生所使用的练习册、试卷中也不多见。所以,我们建议在相对较复杂的问题中,尽量配上合适的图形,以辅助学生

学习和思考。

第四,统计内容的选择关注数据的形态。除频数直方图外,盒须图和茎叶图也是呈现数据特征的表征工具。盒须图与中位数结合比较紧密,能呈现出数据排序分成四等分后的情况。茎叶图与频数分布直方图的区别仅在于分组的分组的不同,但茎叶图能呈现每个数据,让个体能从中找到自己的位置。对学生来说,无论是读图、画图,还是解释这两种统计图呈现的数据的特点都不是太难,所以可考虑将其纳入初中统计内容,让学生在义务教育阶段学到它们。

第五,计算器的使用。新加坡允许学生在 PSLE, GCE-O 水准和 A 水准考试中使用计算器,新加坡考试与评核局^[9]批准可使用的计算器包括卡西欧 CASIO、佳能 CANON、夏普 SHARP、德州仪器 TEXAS INSTRUMENTS 等品牌,其功能仅限于加减乘除四则运算、可输入分数 a/b 和 $a b/c$ 、求平方根和立方根及可以一键输入 π 值,不能有代数计算功能,高中(11—12 年级)阶段的考试可以使用图形计算器,但不能具有编程功能和符号运算功能。计算器的使用,可以将学生从繁琐的计算中解脱出来,而专注于对数学概念和原理的应用。另外,学生也可以用计算器检验自己计算结果的正确性与合理性。在我国中考和高考中,基本不允许使用计算器,碰到计算较复杂的问题,学生可能会出现考试焦虑,所以建议先在一些学校试点看看,再看能否推广实施。

新加坡的数学教育在南洋理工大学国立教

Hölder 不等式的一种新证法及推广

施俊¹ 刘建忠¹ 彭庆英²

(1. 江苏理工学院数理学院, 江苏 常州 213001; 2. 江苏常州技师学院基础部, 江苏 常州 213018)

1 引言

Hölder 不等式是非常重要的不等式, 本文首先给出 Hölder 不等式的一个等价形式, 然后利用函数的凸性给出了 Hölder 不等式的一种新的证明方法, 并据此结合受控理论 (theory of majorization) 给出 Cauchy-Schwarz 不等式的一种加细及一个新的反向 Hölder 不等式.

我们需要一些简单的符号和高等数学知识.

以 \mathbf{R} 表示实数集, $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$ 表示实 n 维空间, $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

定义 1 若定义在区间 I 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x, y \in I, \lambda \in [0, 1]$, 均有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, 则称 f 为 I 上的凸函数, 当上述不等式反向时, 称 f 为 I 上的凹函数.

育学院的领导下, 紧跟国际数学教育研究趋势, 从数学问题解决, 到数学应用与建模、课堂教学实践、大观念、21 世纪核心素养等, 不仅有理论的探讨, 还有实践的努力 (参考新加坡世界科学出版有限公司出版的《数学教育家协会年鉴》(2009 年—2021 年)). 我们的课程改革, 改了教材, 但在评价上一直没有太大的改变, 要使课程改革真正落到实处, 可能还需要在如何设计测试问题上下一番功夫.

参考文献

[1] Woessmann L. Why students in some countries do better: International evidence on the importance of education policy [J]. *Education Matters*, 2001, 1(2): 67-74.

[2] Mullis I V S, Martin M O, Foy P, et al. TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science [EB/OL]. [2024-01-11]. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>.

[3] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). PISA 2018 results (Volume I): What students know and can do [EB/OL]. [2023-12-12]. <https://doi.org/>

10.1787/5f07c754-en.

[4] 江春莲, 许俊丹. 新加坡小学毕业考试数学试卷 [J]. *小学教学(数学版)*, 2014(2): 52-53.

[5] 江春莲, 巩子坤, 刘付茵. 2013—2015 年新加坡小学毕业离校考试数学试卷分析 [J]. *小学教学(数学版)*, 2017(5): 14-18.

[6] Hart K M, Kerslake D, Brown M L, et al. Children's understanding of mathematics: 11-16 [M]. London: John Murray, 1981.

[7] Stewart I. The great mathematical problems: Marvels and mysteries of mathematics [M]. London: Profile Books Ltd, 2013.

[8] Jiang C, Kim D H, Wang C, et al. Premises and challenges of high-stakes examinations: National higher education entrance examination mathematics test scores in China [J]. *Journal of Applied Educational and Policy Research*, 2019, 4(1): 1-21.

[9] Singapore Examinations and Assessment Board. Guidelines on the use of electronic calculators in national examinations [EB/OL]. [2023-11-11]. https://www.seab.gov.sg/docs/default-source/documents/guidelines_calculators.pdf.