何漢秋，梁翠瓊，江春蓮(2023). 看似簡單卻十分不簡單的數學課：因式分解. 澳門數學教育，21，43-46.

看似簡單卻十分不簡單的數學課:因式分解

澳門廣大中學　何漢秋　梁翠瓊老師
澳門大學教育學院　　　江春蓮教授

因式分解是整式乘法的逆運算,它是解多項式方程和不等式以及分式運算的基礎。有了因式分解,我們就可以對多項式方程和不等式進行降次,實現從高次到低次、化繁為簡的目的;有了因式分解,以多項式為分母的分式的四則運算才得以順利進行,所以因式分解的學習很重要。

儘管因式分解是整式乘法的逆運算,但對學生而言,兩者的難度卻不可相提並論。整數乘法可類比數的運算,學生有比較好的基礎,乘法法則包括單項式乘以單項式、單項式乘以多項式到多項式乘以多項式,層次遞進,環環相扣。但因為因式分解的方法比較多,也比較靈活,技巧性強,其在一定程度上造成了學生的學習困難。雖說因式分解也可類比因數分解,但在因式分解中,分解出的因式卻比因數(主要是質因數)要複雜得多。

基於上述原因,我們將在本文中討論因式分解第一節課的不同設計及其優缺點。因式分解第一節的內容主要包括:(1)因式分解的概念;(2)因式分解的第一個方法,即提取公因式法的學習和初步訓練。提取公因式法涉及兩個技巧,一是最大公因式的確定,這是例(1)的情形;二是將某個因式當作公因式提取出來,這是例(2)的情形,其中蘊涵換元的思想。這節課看起來很簡單,希望通過下文的討論,可以讓教育同仁看到學生的學習困難,明白有些看起來很簡單的東西,對學生來說,卻是很難的內容。也希望老師們能在日後的教學中注意教學細節,充分發揮好老師的講解作用。

一、概念引入

關於因式分解,人民教育出版社(後面簡稱人教社)的教材上出現過兩種不同的引入方式。一是類比因數分解,具體地說,從"把 630 分解成幾個質數的乘積形式"類比將 x^2+x 和 x^2-1 寫成整式的乘積的形式,進而定義"因式分解為將一個多項式化成幾個整式的積的形式的變形"(人教社,2008,p.165);二是單刀直入,直接從整式乘法的逆運算角度在討論了 x^2+x 和 x^2-1 後給出定義(人教社,2013,p.114)。

本文作者認為,可以從 $999 \times 999 + 999$ 的簡便計算引入。這個計算稍複雜,除了求助於計算器,應該沒有學生願意直接算,怎麼辦呢?有學生可能想到乘法對加法的分配律,把兩個式子中的999提出來,得到 $999 \times (999 + 1) = 999000$,計算一下變得簡單了!這就是做數學的"啊哈"狀態!進而,我們可設 $x = 999$,討論這裡的變形過程,即 $x^2 + x = x(x + 1)$,將"一個多項式化成幾個整式乘積的形式"!

多年前,本文作者曾跟我國數學教育家張奠宙先生討論時,張先生認為還可以從討論方程 $x^2 + x = 0$ 的解引入。學生不難觀察到,這個方程有一個解 $x_1 = 0$,也可以通過進一步的嘗試,得到方程的另一解 $x_2 = -1$。接下來是討論方程是否還有別的解。可能有學生會注意到,該方程可變形為 $x(x + 1) = 0$,進而可以得到只有 $x = 0$ 和 $x + 1 = 0$ 兩種情況。

比較這四種引入方法,我們認為從 $999 \times 999 + 999$ 的計算引入最合適,提取公因式的過程迫切而自然,而且起點較低,可以激發數學能力較低的學生的學習興趣。人教社的兩種處理方式沒能說明為什麼要做因式分解。從方程 $x^2 + x = 0$ 的解的個數的討論引入對一般學生來說,挑戰性太大。

二、提取公因式法

人教社(2008, 2013)的教材,直接從 $ma + mb + mc$(或 $pa + pb + pc$)入手,各項都有個公共的因式(即公因式)m,然後基於 $m(a + b + c) = ma + mb + mc$ 得到 $ma + mb + mc = m(a + b + c)$,並說另一個因式是 $ma + mb + mc$ 除以 m 得到的商。將 $a + b + c$ 說成是 $ma + mb + mc$ 除以 m 得到的商沒錯,但不如將其表述為 $ma + mb + mc$ 的各項除以 m 得到的商的和更具操作性。

如果在概念引入的時候採用 $999 \times 999 + 999$ 的簡便計算引入,現在就可以設 $x = 999$,其中的變形就是:$x^2 + x = x(x + 1)$。右邊的單因式 x 是 x^2 和 x 的公因式,把 x^2 和 x 中的 x 提出去後,分別得到 x 和1,所以第二項是 $x + 1$。當發現有公因式的時候,把公因式提出去就可以很快將多項式變成乘積的形式,所以提取公因式是因式分解最基本的方法。

三、例題講解

在人教社(2008, 2013)的教材上,用了如下兩個例子:(1)$8a^3b^2 + 12ab^3c$;(2)$2a(b + c) - 3(b + c)$. 對例(1),教材直接分數位部分(8和12)和字母部分(a^3b^2 和 ab^3c)討論得到它的公因式 $4ab^2$,但沒有引入最大公因式的概念。對例2,指出 $b + c$ 是公因式後很快得到了結果。

對例1,我們可以把它改編成如下的沒有正確答案的選擇題,讓學生來討論。

下面是4名同學給出的例(1)的因式分解的答案,請問其中哪些是正確的?

(A) $4(2a^3b^2 + 3ab^3c)$	(B) $ab^2(8a^2 + 12bc)$
(C) $4a(2a^2b^2 + 3b^3c)$	(D) $4ab(2a^2b + 3ab^2c)$

這四個選項中,按照提取公因式法的定義,前面的三個都沒有錯誤。第一個只提了係數的公因數,第二個只提了字母部分的公因式,第三個既提了係數的公因數,也提了字母部分的公因式,但沒有把所有的公因式都提取出來,什麼是“所有”的公因式呢?我們可以仿照小學中學過的“最大公約數”的概念提出“最大公因式”的概念,把它提出來後,得到的式子 $2a^2$ 和 $3bc$ 就不再有任何“交集”了!這就是數學對“最簡”的追求,對簡潔美的追求!

第四個選項有計算錯誤,通過對它的討論可以提醒學生如何檢驗因式分解結果的正確性。在這樣的討論過程中,有比較、分析、檢驗等數學思維蘊含其中,可極大地提升學生的思維水準和數學交流能力。

對例 2,教師在講解的過程中,需要邊講邊標示,講的時候要有意識地把 $b+c$ 單獨念出來,並用紅色的粉筆將 $b+c$ 圈示出來 $2a\boxed{(b+c)}-3\boxed{(b+c)}$,以顯示在這裡我們可以把他們看作一個整體,當作一個因式提出去。從數過渡到式,要將字母和字母組成的代數式作同樣的處理,對很多學生來說,這是非常難的事情。

四、課堂練習及講評

在課堂練習部分,人教社兩版的設計比較接近,2013 版的比 2008 版的多了 2 道,下面呈現的是 2013 版的。

1. 把下列各式分解因式:

(1) $ax+ay$	(2) $3mx-6my$
(3) $8m^2n+2mn$	(4) $12xyz-9x^2y^2$
(5) $2a(y-z)-3b(z-y)$	(6) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$

2. 先分解因式,再求值:

$4a^2(x+7)-3(x+7)$,其中 $a=-5$,$x=3$。

3. 計算 $5\times3^4+4\times3^4+9\times3^2$。

第 1 題中的 6 道小題,第(1)題可換為 x^2+ax,這是之後要學習的一元二次方程中較簡單且常見的題型;第(3)題可換為 $8m^2n+20mn^2$,與(4)一起讓學生練習例(1)的方法。第(5)和第(6)題可互換,因為第(6)題的公因式能觀察出來,而第(5)題則需要把前後兩個式子中的一個的符號變換一下才能湊出公因式 $y-z$ 或 $z-y$,對符號運算不熟悉的同學容易出錯。

第 2 題意義不大,可舍去。第 3 題可改成兩個子問題:(1)計算 $88\times9999+12\times9999$;(2)給你自己和同學出 3 道可以用類似方法的計算題。這裡的第(1)題是仿照引入的例子,將 999 變成了 9999,$999+1$ 則換成了 $88+12$,學生注意到這樣的結構後,可以從結果出發,建構更多的問題,學會了自己出題,就融會貫通了。

代數常被看作是高等數學的門檻(Cai & Knuth, 2005),在中學如何說明學生打好基礎

需要深入分析,並在此基礎上設計出激發學生思考的問題,供學生討論、發揮和拓展,並為後續主題的學習做些鋪墊,日積月累,學生將會越來越喜歡數學。

參考文獻:

Cai, J., & Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 1–4. https://doi.org/10.1007/BF02655891

人民教育出版社(2008). 義務教育課程標準實驗教科書數學八年級上冊. 北京:人民教育出版社。

人民教育出版社(2013). 義務教育教科書數學八年級上冊. 北京:人民教育出版社。