

變式問題串課堂 尋規說理話數思

澳門培華中學 葉睿琳 張春燕老師
澳門大學教育學院 江春蓮教授

【导语】2023年2月24日,澳門培華中學進行了數學教研活動,期間葉睿琳老師就《數列的概念》在高一文科班進行了公開課教學,隨後該校數學組老師就教學活動的設計進行了研討。下面我們將先完整呈現這節課的教學流程,同時就其教學設計作些講評,希望能給一綫數學老師帶來一些啓迪,特別是應用概念性變式進行教學問題的設計。

【教學目的】這節課的知識與技能方面的目的有三:(1)理解數列的有關概念;(2)掌握數列的分類;(3)掌握數列通項公式的概念,能夠根據數列的前幾項寫出數列的一個通項公式。過程與方法方面的目標是:經歷“事實→概念”的概念形成過程,提升數學抽象的核心素養。情感、態度與價值觀方面的目標是:學會用聯系的觀點學習數學,形成自主探索的學習習慣;感受數學文化的魅力,體會數學來源于生活,提高數學學習的興趣。

【評語1】上面對這節課的“知識與技能”方面的目的寫得比較清晰,而另兩個方面可以再具體一點。如在“過程與方法”方面的目標是:(1)經歷“觀察、分析具體實例→歸納、抽象概念的本質屬性”的概念形成過程,發展數學抽象思維能力;(2)經歷“從特殊例子中歸納出一般規律→用更多的例子對觀察到的規律進行檢驗→生成一般規律”的思維過程,得到數列的通項公式,提升學生的數學模式識別能力和數學建模能力。“情感、態度與價值觀”方面的目標是:(1)學會從特殊性看問題,在特例中尋找一般規律的數學思維習慣;(2)感受數學文化的魅力,體會數學來源于生活又服務于生活,認識數學的廣泛應用性、提高學生數學學習興趣。

【活動1】一天,偵探社的同學們收到一封神秘的信件。信件是這樣寫的:偵探社的同學們,請你們團結合作,找到我,並說出我的秘密。

第一關:請各組同學分別找出下列八組問題中每道題的規律,根據該規律得到其中空白處應該填入的數字,並計算同一組所填入的四個數字之和,八組問題的數字和按順序寫出來便是通往下一關的密碼。

第一組: 1) 10, 10, _____, 10, 10, ... 2) _____, 2, 3, 4, 5, ... 3) 0, -1, _____, -3, -4 4) 1, -7, 1, _____, 1, -7, 1, -7 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____	第二組: 1) 5, _____, 5, 5, 5, ... 2) 1, _____, 5, 7, 9, ... 3) -4, -6, -8, _____, -12 4) _____, 0, 2, 0, 2, 0, 2 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____
第三組: 1) _____, 3, 3, 3, 3, ... 2) 2, 4, _____, 8, 10, ... 3) -9, _____, -11, -12, -13 4) 10, 3, 12, _____, 14, 3, 16, 3 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____	第四組: 1) 7, 7, 7, 7, _____, ... 2) 1, 4, 9, _____, 25, ... 3) -10, _____, -30, -40, -50 4) -1, 0, -1, _____, -1, 0, -1, 0 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____
第五組: 1) 0, 0, _____, 0, 0, ... 2) 1, 6, 11, 16, _____, ... 3) 7, _____, -1, -5, -9 4) 12, -24, 12, _____, 12, -24, 12, -24 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____	第六組: 1) 5, _____, 5, 5, 5, ... 2) 3, 6, _____, 12, 15, ... 3) 25, 16, 9, _____, 1 4) 2, -4, 2, -9, 2, _____, 2, -25, 2, -36 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____
第七組: 1) 2, 2, _____, 2, 2, ... 2) _____, 5, 10, 15, 20, ... 3) -5, -10, -15, _____, -25 4) 10, 20, 11, 20, 12, 20, 13, _____ 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____	第八組: 1) 8, 8, 8, 8, _____, ... 2) 10, _____, 30, 40, 50, ... 3) 0, -7, -14, _____, -28 4) 1, 0, 1, _____, 1, -6, 1, -9, 1, -12 1) $a_n =$ _____ 2) $b_n =$ _____ 3) $c_n =$ _____ 4) $d_n =$ _____

【评语 2】活動 1 中主要的規律有:1) 給出的數字全部相同,所以空白處也應該填入該數字,以保證整齊劃一;2) 后項減前項得到的差全部一樣,即等差數列(當然,這節課不宜給出這個名稱),這裏的差有 1,2,3,5, -4, -5,10 等;3) 隔項成規律的,如隔項的數相等,或者隔項的數成“等差”的;4) 完全平方數的,如第六組的第 3) 題,這裏第一次出現,最好按遞增的順序呈現,緊接其后的第 4) 題添加了負號。活動 1 的重點是用語言來描述每道題的規律,并得到同組同學的認可,不認可的可以講出自己的理由。

【活動 2】新知初探 1——數列的相關概念及分類

活動 2 則在總結活動 1 的基礎上帶領學生歸納出:(1) 數列的概念、數列的第 n 項以及數列的記號 $\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, \dots 。(2) 數列的兩個分類:按個數有限還是無限分為有窮數列和

無窮數列；按數列中前後項的大小遞增、遞減分為常數數列、遞增數列、遞減數列、擺動數列等。之後是檢測學生對這些概念理解的辨析問題和填空問題(如下)。

第二關：請同學們小組討論，完成下列題目。

1、下列四項陳述中，正確的是()

- (A) 所有數列可分為遞增數列和遞減數列兩類。
- (B) 數列中的數由它的位置序號唯一確定。
- (C) 數列 1,3,5,7 與數列 7,5,3,1 是同一組數列。
- (D) 同一個數在數列中不可能重復出現。

2、下列數列中，既是無窮數列又是遞增數列的是()

- (A) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- (B) $0, -1, 0, -1, \dots$
- (C) $-4, -3, -2, -1, \dots$
- (D) $1, 2, 3, 4, \dots, 30$

3、給出以下數列：

- ① $1, -1, 1, -1, \dots$
- ② $2, 4, 6, 8, \dots, 2000$
- ③ $8, 8, 8, 8, \dots$
- ④ $0.8, 0.8^2, 0.8^3, 0.8^4, \dots, 0.8^{10}$

其中，有窮數列為_____；無窮數列為_____；遞增數列為_____；遞減數列為_____；常數列為_____。(填序號)

【評語 3】從新知部分可以看出，活動 1 中每組問題的設計充分考慮到了數列的各種類型，並用具體的變式呈現出來。運用具體的概念變式(鮑建生，黃榮金，易凌峰，顧泠沅，2003)讓學生抽象出概念的定義，並輔助數列概念的兩種分類。概念學習後的課堂評估環節，採用了判斷題、選擇題和填空題相結合的形式。如圖 1 中的第 1 題，看起來是選擇題，實則是判斷題。

【活動 3】新知初探 2— 數列的通項公式

活動 3 是數列通項公式的定義和兩個注意事項。數列的通項公式是表示數列 $\{a_n\}$ 的第 n 項與它的序號 n 之間的對應關係的式子。兩個注意事項是：(1) 並不是所有的數列都有通項公式；(2) 同一數列的通項公式，其表達形式可以不唯一，例如數列 $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ 的通項公式可以寫成 $a_n = (-1)^n$ 、 $a_n = (-1)^{n+2}$ 和 $a_n = \cos n\pi$ 等。

接下來是鞏固練習。

第三關是同學們分組討論並完成題目：北宋哲學家邵雍的詩《山村詠懷》：“一去二三里，煙村四五家，亭臺六七座，八九十枝花。”詩中涉及的數字依次為_____，這個數列的通項公式為：_____。

第四關是每組同學設計一組能夠寫出通項公式的數列，與其他組交換，為對方組別寫出他們所出的數列的通項公式。

【评语 4】考慮到學生從小學就有接觸“找規律”的數字問題，在三個知識點中，數列的通項公式是這節課的難點。所以此處宜借助活動 1 中的例子帶着學生學會分析這些數列的數字特點，從原來的對兩相鄰項數值關係的關注轉到尋找序號 n 與 a_n 的關係。為此，我們需要從最簡單的自然數數列開始，所以第三關是很好的例子，也可以在前面添加一項“0”，或者刪除最前面一項“1”，僅僅移動一個數字，就會得到一個每項都不同的數列。為了便于學生清晰看到 n 與 a_n 的關係，需要像上面的表格一樣，在前面加上一行代表 n 的值。

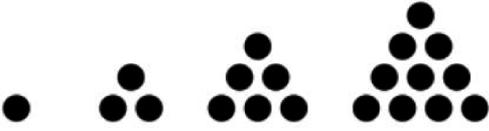
n	1	2	3	4	5	6	7	...	
$f(n)$	1	2	3	4	5	6	7	...	$f(n) = n$
$g(n)$	0	1	2	3	4	5	6	...	$g(n) = n - 1$
$h(n)$	2	3	4	5	6	7	8	...	$h(n) = n + 1$

為方便學生寫出通項公式，我們在活動 1 的后面添加了四個空格，讓學生在那里依次填上相應數列的通項公式。

本節課選用的通項公式需要盡量簡單，對學生來說是熟悉而又陌生的，如偶數數列 2, 4, 6, 8, ...; 奇數數列: 1, 3, 5, 7, ...; 3 的倍數, 4 的倍數等等。也可以讓學生接觸簡單的完全平方數數列，為后面的學習作點鋪墊。

【活动 4】課堂小結并布置作業。

課堂小結部分是第五關，同學們自己總結本節課的知識點。作業是三角形數（如下圖），該數列的通項公式可以通過數點的方法得到： $a_n = 1 + 2 + \dots + n$ 。這也是后面要學習的自然數數列的前 n 項和。

<p>傳說古希臘畢達哥拉斯學派的數學家經常在沙灘上研究數學問題，他們在沙灘上畫點或用小石子來表示數，如右圖 1，三角形點陣表示三角形數，它們依次為 _____， _____， _____， _____， _____，這個數列的通項公式為 _____。</p>	
---	--

【总评】本節課的活動 1 設計得很完美，既可以用來抽象出數列的概念，還可以用來討論數列的分類及通項公式。用它來貫穿整個課堂，課堂就會連貫順暢起來。充分使用基于概念性變式設計的問題，可以極大地提升課堂教學效率。最后，也可像第四關一樣，讓學生學會自己出題，培養學生的創新能力和意識。

在活動 1 中，老師需要給學生足夠的時間讓學生觀察其中的數字排列規律，并用語言敘述出來。此時學生所描述的規律，大多會按小學學到的方法，即如何從前項得到后項，而數列的通項公式則是 a_n 與序號 n 之間的函數關係，所以確定數列的通項公式時，需要在前面

加一行 n 值 $1, 2, 3, \dots$, 幫助學生觀察 a_n 與 n 的關係, 并用語言和數學表達式表示出來, 發展學生的數學思考能力和數學交流能力。

参考文献:

鲍建生, 黄荣金, 易凌峰, 顾泠沅(2003). 变式教学研究(续). 数学教学, 2003(2), 6 - 10, 23.